

Title	非圧縮性流れの双極子分解 (流体計算における高速アルゴリズムの理論とその応用)
Author(s)	上野, 和之; 松本, 祐子
Citation	数理解析研究所講究録 (2008), 1606: 105-109
Issue Date	2008-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/139955
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

非圧縮性流れの双極子分解 Dipole Decomposition of Incompressible Flow

東北大・工・航空 上野 和之 (Kazuyuki UENO)

松本 祐子 (Yuko MATSUMOTO)

Department of Aerospace Engineering,
Tohoku University

1 はじめに

流れの可視化方法にはさまざまなものがあり、それに対応して見えてくる事柄も少しずつ違ってきます。可視化実験に限らず、理論解析や数値解析の結果の図示 (可視化) についても同様のことが言えるでしょう。この研究では、非圧縮性流れを双極子流れに分解して観察することを提案し、その方法について議論します。

双極子流れの重ね合わせで複雑な流れを表現する発想は Hashimoto[1], Buttke[2], Cortez[3], Summers[4] など過去の研究にも散見されます。それらの研究では、初期の双極子配置が既知であるものとして議論が進められています。しかし、複雑な流れに対応する双極子配置を同定する方法については議論されていません。また、流れ場のスケール多重性に関する考え方が私たちの研究と彼らの研究で違ってきます。私たちの研究では、双極子そのものが寸法情報を担っています。彼らの研究にはそのような発想がありませんので、おそらく双極子間の距離や配置にスケール多重性が反映されるのだと思いますが、明確には言及されていません。

この研究では、流れの数値解析結果や PIV 計測結果を元データとして、それを双極子流れに分解する方法について議論します。過去に類似の研究には見あたりませんし、対応する可視化実験方法もありません。したがって、得られる図は新しい視点による可視化情報であり、新しい物理的洞察が得られると期待しています。

本来の研究の目的は 3 次元流れを 3 次元双極子流れに分解して観察することですが、この研究では検証が容易な 2 次元流れを 2 次元双極子流れに分解して観察する方法について議論します。

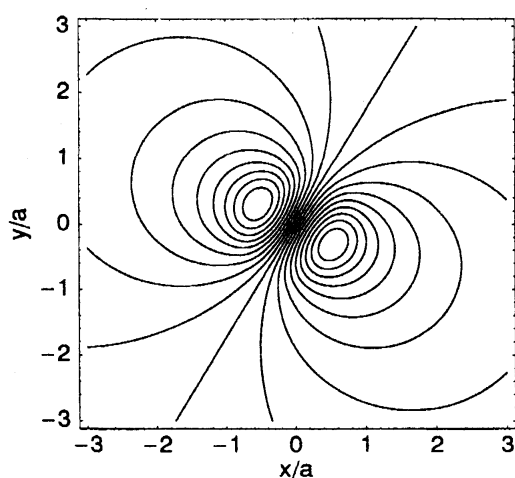


Fig.1 Streamlines of the basis flow of dipole decomposition, $\mu_x = 1/2$, $\mu_y = \sqrt{3}/2$, $a = 1$.

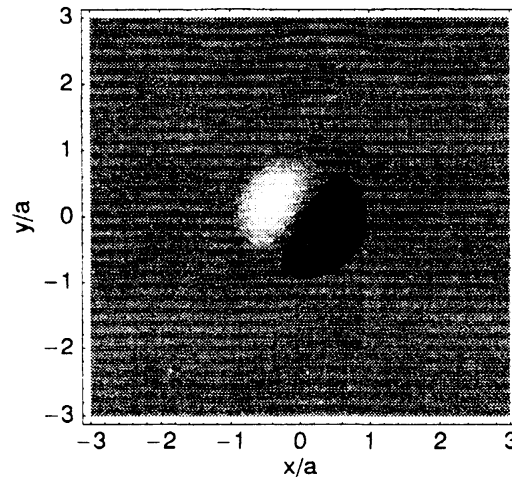


Fig.2 Vorticity distribution of the basis dipole flow, $\mu_x = 1/2$, $\mu_y = \sqrt{3}/2$, $a = 1$.

2 双極子分解の概略

Fig.1 に示すような、双極子分解の基底流れを導入します。流れの強さは、双極子モーメント μ_i で特徴付けられます。

この基底双極子流れは、重心まわりに渦対を持ちます (Fig.2)。この渦対は、正の渦の渦中心と負の渦の渦中心との距離が概ね a です。(将来 3 次元問題に拡張したさいには、3 次元双極子の重心まわりに渦輪を持つことになります。その場合、渦輪の渦中心線直径が a 程度になります。)

全空間の循環が 0 になるような 2 次元流れは、大小多数の基底双極子流れを重ね合わせで表現できます。また、重ね合わせを示す級数は、デルタ関数を導入することによって、畳み込み積分に置き換えることができます。その積分を、この研究ではウェーブレット逆変換 [5, 6, 7] と解釈しました。そして、対応するウェーブレット順変換を使って双極子分解を実行します。つまり、与えられた流れ場の分布をウェーブレット変換した後に、それをウェーブレット空間で離散化することによって、双極子の位置 (X, Y) 、双極子モーメント μ_i 、寸法スケール a を決定します。

3 双極子分解の例

いくつかの基本的な流れの双極子分解の例を示します。

基底双極子流れには Lamb-Chaplygin dipole [8, 9] に対応する関数を選びましたので、まず最初に Lamb-Chaplygin dipole 自身を元データとして双極子分解を行いました。結果を Fig.3 に示します。等高線は元データの等渦度線を示します。矢印は双極子分解の結果の μ_i の向きと大きさを示します。また、矢印の始点は (X, Y) に対応した位置に描画されます。矢印と直交する線分は寸法スケール a を示しています。以下ではこの端点を双極子の左足・右足と呼びます。Lamb-Chaplygin dipole の場合、左足が正の渦の中心付近に置かれ、右足が負の渦の中心付近に置かれました。

元データが基底双極子流れと同じ分布の関数なので、一つの方極子で Lamb-Chaplygin dipole が表現されました。当然の結果ですが、分解プログラムの健全性と手法の妥当性を裏付ける証拠の一つ

です。

次に、正の渦と負の渦が離れている場合の渦対を元データとして双極子分解を行いました。結果を Fig.4 に示します。元データとして与えられた渦対の重心付近に寸法の大きな双極子があります。ま

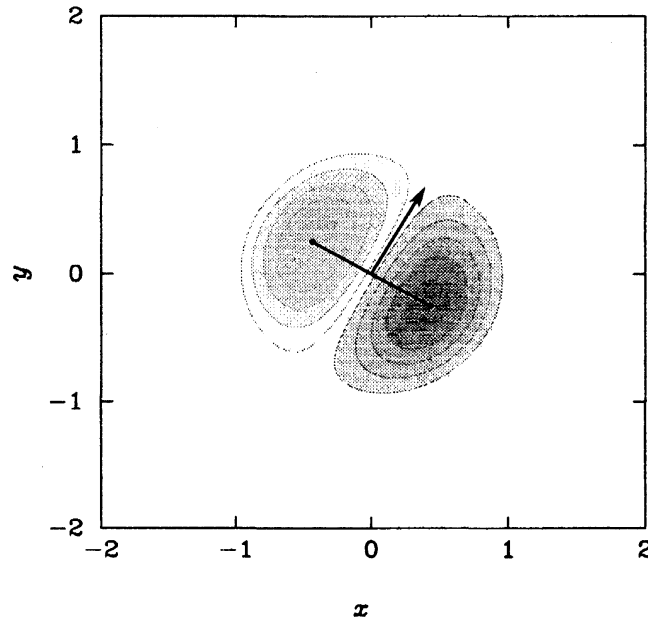


Fig.3 Dipole decomposition of Lamb-Chaplygin dipole. Arrow shows dipole moment μ_i and line segment shows length scale a . Contourlines show vorticity distribution of the original data.

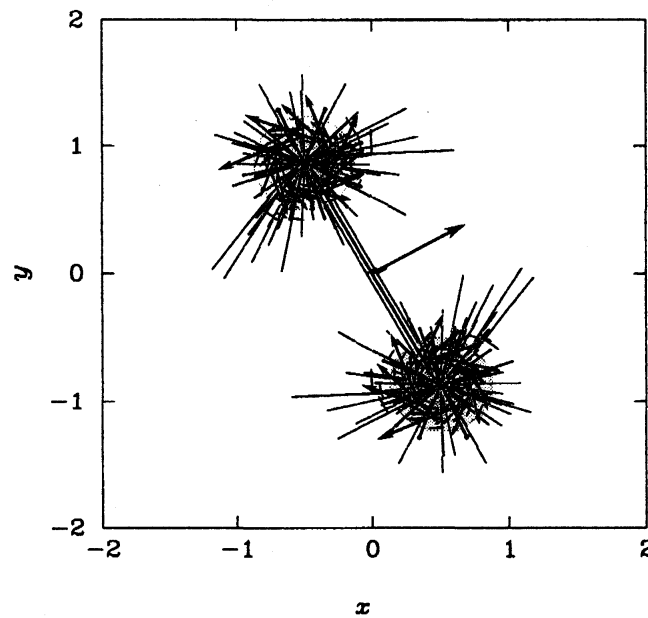


Fig.4 Dipole decomposition of a vortex pair. Arrows show dipole moment divided by the cube of length scale μ_i/a^3 and line segments show length scale a . Contourlines show vorticity distribution of the original data.

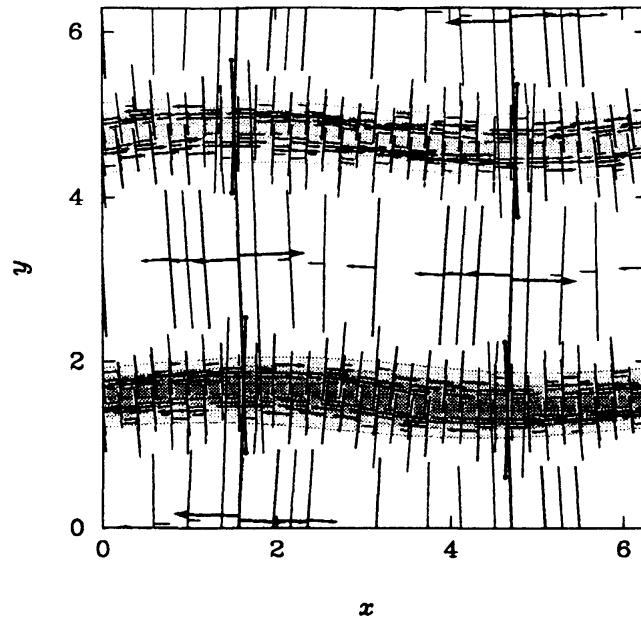


Fig.5 Dipole decomposition of double shear layers. Arrows show dipole moment divided by the cube of length scale μ_i/a^3 and line segments show length scale a . Contourlines show vorticity distribution of the original data.

た、正負それぞれの渦周りに寸法の小さな双極子が得られました。渦周りの双極子は、片足を渦中心近傍に置いています。渦対重心に位置する大きい双極子は、左足を正の渦に右足を負の渦に置いています。それぞれの足の位置は渦中心からややずれています。

この図で示された μ_i/a^3 は、寸法スケールの大きい双極子と小さい双極子を比較的バランス良く示すことができます。作図の際には、矢印の重なりによる視認性の低下を避けるために、 $\mu_i^{(n)}/a^3$ の大きさが最大値の 10% よりも小さいものは省略して描きました。もし、 μ_i/a^2 を矢印で作図したなら、比較的大きな寸法 a の双極子に着目した図となります。いっぽう、 μ_i/a^4 を矢印で作図すると、比較的小さな寸法 a の双極子に着目した図となります。

二重剪断層を元データとした場合の双極子分解の結果を Fig.5 に示します。剪断層の内部に二列の縦列双極子が並びます。この二列は互いに矢印の向きが逆です。これらの双極子の寸法スケールは、剪断層の厚みと同じ程度です。いっぽう、2つの剪断層に挟まれた渦なしの領域には、剪断層間距離と同じ程度の寸法スケールの双極子が得られます。

4 まとめ

非圧縮性流れを大小多数の双極子流れに分解して観察することを提案し、分解方法を議論しました。

まず、双極子モーメント μ_i を使って基底双極子流れを表現しました。その関数には寸法スケールを示す相似パラメータ a が含まれています。次に、与えられた流れ場を連続ウェーブレット変換しました。得られたウェーブレット空間の関数を離散化し、双極子の位置 (X, Y) 、双極子モーメント μ_i 、寸法スケール a を決定しました。

双極子分解を使っていくつかの基本的な 2 次元流れを双極子分解し、得られた双極子を図示しまし

た。得られた図から、渦対、剪断層に対応する双極子表現を把握しました。

双極子分解の発想と結果は、複雑な非圧縮性流れに関する新しい物理的洞察を与えると期待されます。また、この研究で示した双極子分解は、非圧縮性流体の流れ場だけではなく磁場などのダイバージェンスフリーなベクトル場に適用することができます。

近日中に三次元流れの双極子分解に着手する予定です。大きな困難はないと予想しています。

参考文献

- [1] H. Hasimoto, "Elementary aspects of vertex motion," *Fluid Dyn. Res.* **3**, 1 (1988).
- [2] T.F. Buttke, "Velocity methods: Lagrangian numerical methods which preserve the Hamiltonian structure of incompressible fluid flow," in *Vortex Flows and Related Numerical Methods*, edited by J.T.Beale *et al.* (Kluwer Academic Publishers, 1993) p.39.
- [3] R. Cortez, "Impulse variables, vortex dipoles and applications," *ESAIM Proceedings* **1**, 95 (1996).
- [4] D.M. Summers, "Towards an impulse-based Lagrangian model of boundary layer turbulence," *Physica D* **154**, 287 (2001).
- [5] P.S. Addison, *The illustrated wavelet transform handbook*, (IOP Publishing, Bristol, 2002).
(P.S. Addison, "ウェーブレット変換ハンドブック," 新誠一・中野和司監訳, 朝倉書店, 2005).
- [6] M. Farge, "Wavelet transforms and their applications to turbulence," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **24**, 395 (1992).
- [7] J.P. Antoine, "The 2-D wavelet transform, physical applications and generalizations," in *Wavelet in Physics*, edited by J.C. van den Berg (Cambridge Univ. Press, 1999) p.23.
- [8] H. Lamb, *Hydrodynamics* 6th ed., (Cambridge University Press, 1932).
- [9] V.V. Meleshko and G.J.F. van Heijst, *J. Fluid Mech.* **272**, 157 (1994).